Chapitre 14

Dynamique d'un système électrique

L'étude du fonctionnement dynamique d'un circuit électrique fait l'objet de ce chapitre. Il nécessite de maîtriser les outils développés en classes de seconde et de première, notamment la **loi des mailles**, la **loi des noeuds** et la **loi d'Ohm**. Nous verrons comment caractériser le comportement de circuits électriques comportant un générateur et deux dipôles particuliers : la **résistance** et le **condensateur**. Cette étude se fera dans le cas d'un **régime variable**.

- Vidéo Cours détaillé
- Vidéo Cours résumé

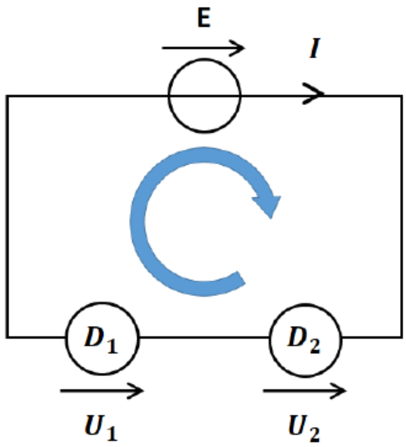
14.1 Rappels essentiels

Loi des mailles

La somme algébrique des tensions électriques au sein d'une maille d'un circuit électrique est nulle.

$$E - U_1 - U_2 = 0$$
$$E = U_1 + U_2$$

Remarque :
Attention à tenir compte du sens des tensions électriques en fonction de la convention générateur ou récepteur.

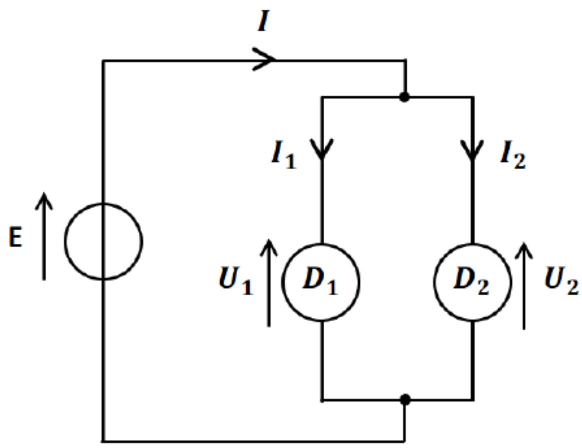


Loi des nœuds

La somme des intensités entrantes au niveau d'un noeud est égale à la somme des intensités sortantes.

$$I = I_1 + I_2$$

Remarque :
Attention à tenir compte du sens du courant dans chaque branche arrivant au niveau du noeud.

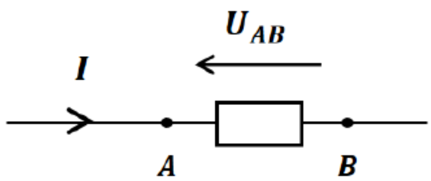


Loi d'Ohm

La tension aux bornes d'une résistance électrique est proportionnelle au courant qui la traverse :

$$U_{AB} = RI$$

U la tension (en V)
I l'intensité (en A)
R la résistance (en Ohms Ω)



14.2 Condensateur

14.2.1 Intensité du courant en régime variable

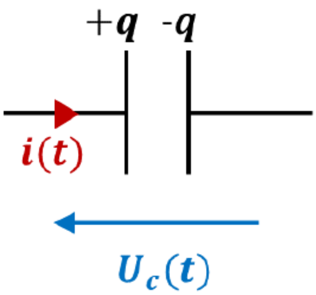
Intensité du courant en régime variable

Lorsque la tension et l'intensité du courant varient au cours du temps, on dit que le système électrique évolue en **régime variable**. L'**intensité $i(t)$** (en A) du courant électrique se définit comme la **dérivée par rapport au temps de la charge électrique $q(t)$** (en C) :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

14.2.2 Condensateur

Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices disposées l'une en face de l'autre, et séparées par un isolant. La géométrie des armatures peut varier (planes, cylindriques, sphériques). Lorsqu'une tension électrique est appliquée aux bornes du condensateur, les armatures accumulent respectivement des charges positives et négatives de part et d'autre, laissant le condensateur globalement électriquement neutre. On appelle capacité C (exprimée en Farad F) du condensateur son pouvoir d'accumulation des charges sur ses armatures.



Capacité d'un condensateur

La **capacité C** d'un condensateur permet de relier la charge q positive accumulée sur l'une des armature, à la tension u_c aux bornes du condensateur :

$$q(t) = Cu_c(t)$$

$q(t)$ la charge (en C)
C la capacité (en F)
$u_c(t)$ la tension aux bornes du condensateur (en V)

14.2.3 Relation tension-intensité d'un condensateur

Relation tension-intensité

En combinant la relation charge-tension et la relation charge-intensité, on obtient la relation entre la tension $u_c(t)$ (V) et l'intensité $i(t)$ (en A) :

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

14.3 Circuit RC série : charge d'un condensateur

14.3.1 Schéma du circuit électrique

On s'intéresse à un circuit électrique en régime variable, comprenant un générateur de tension continue E (en V), un dipôle ohmique de résistance R (en Ω) et un condensateur de capacité C (en F). Le

schéma de la figure 14.1 représente ce montage.
Initialement, l'interrupteur K est ouvert, les tensions et intensités sont donc nulles dans tout le circuit.
A l'instant $t = 0$ s, on ferme l'interrupteur.

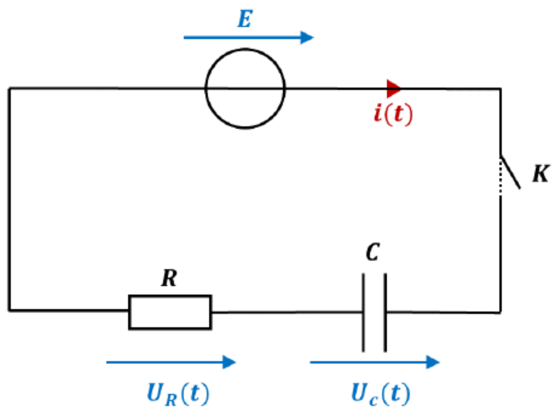


Figure 14.1 – Schéma du circuit électrique dans le cas de la charge d'un condensateur.

14.3.2 Équation différentielle

On cherche à établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur. Pour cela, on va utiliser une loi des mailles ainsi que les relations tension-intensité pour la résistance et le condensateur.

Équation différentielle

1. On applique la loi des mailles en respectant les conventions générateur et récepteur :

$$u_R + u_c = E$$

2. On remplace $u_R = Ri$ d'après la loi d'Ohm et $i = C\frac{du_c}{dt}$:

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

3. On divise par $\tau = RC$ pour retrouver une forme canonique d'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC}$$

$\tau = RC$ est appelé le temps caractéristique de charge du condensateur.

14.3.3 Résolution de l'équation différentielle

Pour cette partie, on illustrera le problème avec les valeurs suivantes : $E = 12$ V, $R = 2,5$ kΩ et $C = 150$ μF.

D'après le chapitre 0, la solution d'une telle équation différentielle se construit par la somme d'une solution générale à l'équation homogène associée, que l'on notera $u_{c_1}(t)$, et d'une solution particulière notée $u_{c_2}(t)$.

Solution de l'équation différentielle

1. Solution générale :
$$u_{c1}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$
Avec $A \in \mathbb{R}$ une constante d'intégration et $\tau = RC$ le temps caractéristique.
2. Solution particulière :
$$u_{c2}(t) = E$$
3. Solution complète :
$$u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$
4. Détermination de la constante A : A l'état initial, la tension est nulle (circuit ouvert) donc $u_c(t=0) = 0$ V
$$A \times e^{-\frac{0}{\tau}} + E = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A + E = 0$$
Donc la constante vaut $A = -E$ d'où la solution finale en factorisant par E :
$$u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Le temps caractéristique de charge du condensateur vaut : $\tau = RC = 0,25.10^6 \times 150.10^{-6} = 0,38$ s.

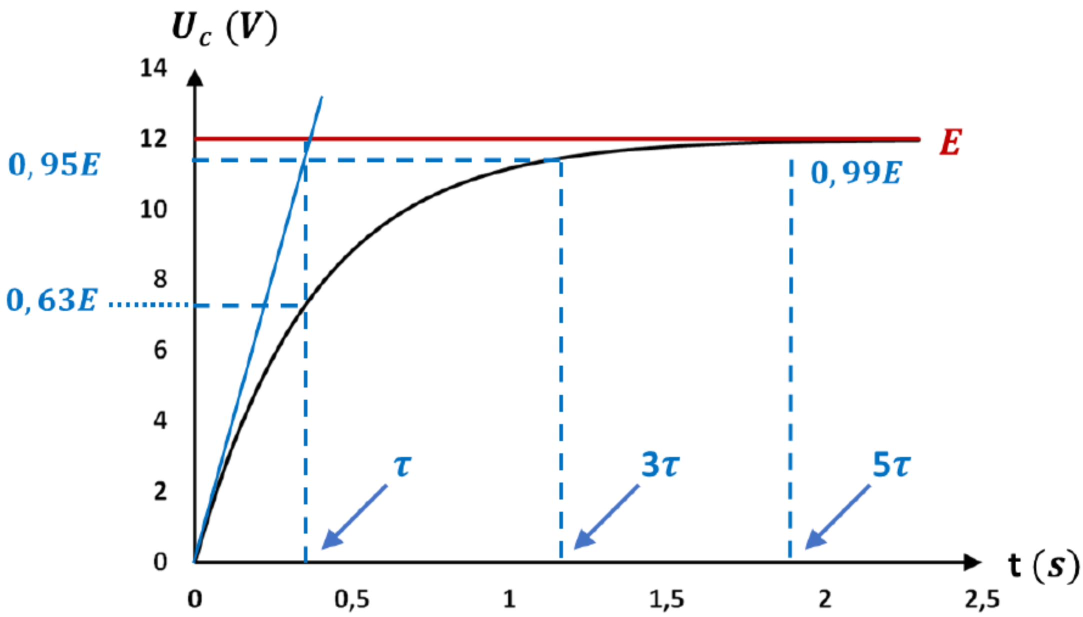


Figure 14.2 – Tension aux bornes du condensateur en fonction du temps au cours de la charge

14.4 Circuit RC série : décharge d'un condensateur

On s'intéresse à un circuit électrique en régime variable, comprenant cette fois uniquement un dipôle ohmique de résistance R (en Ω) et un condensateur de capacité C (en F) **préalablement chargé.** Cela revient à éteindre le générateur de la figure 14.1 à la fin de la charge.
La tension aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps donc sa valeur initiale pour la décharge est sa valeur finale pour la charge, à savoir $u_c(t = 0) = E = 12$ V.

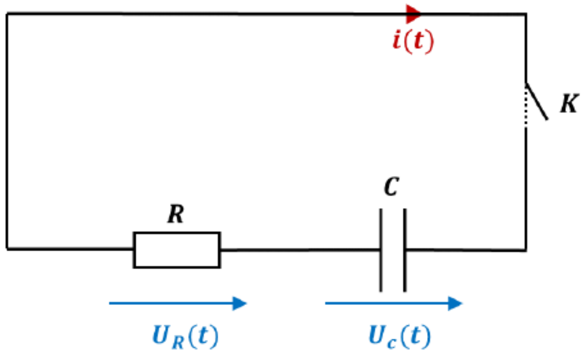


Figure 14.3 – Schéma du circuit électrique dans le cas de la décharge d'un condensateur.

14.4.1 Équation différentielle

Équation différentielle

1. On applique la loi des mailles en respectant les conventions générateur et récepteur :
$$u_R + u_c = 0$$
2. On remplace $u_R = Ri$ d'après la loi d'Ohm et $i = C\dfrac{du_c}{dt}$:
$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$
3. On divise par $\tau = RC$ pour retrouver une forme canonique d'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, mais cette fois ci sans second membre :
$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = 0$$
$\tau = RC$ est appelé le temps caractéristique de décharge du condensateur.

14.4.2 Résolution de l'équation différentielle

On reprend les valeurs suivantes : $E = 12$ V, $R = 2,5$ kΩ et $C = 150$ μF. **Le second membre étant nul, il n'y a pas de solution particulière à trouver.**

Solution de l'équation différentielle

1. Solution générale :
$$u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$
Avec $A \in \mathbb{R}$ une constante d'intégration et $\tau = RC$ le temps caractéristique.
2. Détermination de la constante A : A l'état initial, la tension est $u_c(t = 0) = E$
$$A \times e^{-\frac{0}{\tau}} = E \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = E$$
Donc la constante vaut $A = E$ d'où la solution finale :
$$u_c(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

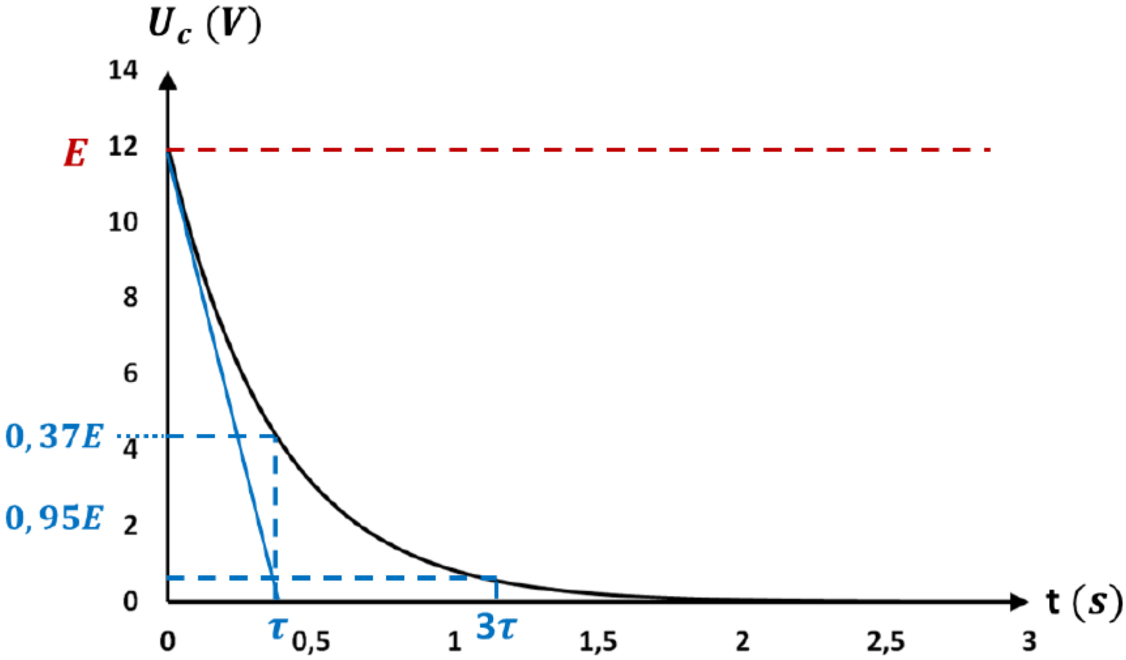


Figure 14.4 – Tension aux bornes du condensateur en fonction du temps au cours de la décharge

14.5 Applications du condensateur

Le pouvoir d'accumulation de charge d'un condensateur offre plusieurs intérêts dans un circuit électrique. Il peut notamment servir à stabiliser une alimentation électrique, ou bien encore stocker de l'énergie.

Mais il existe également des technologies qui utilisent autrement le pouvoir capacitif du condensateur. En effet, la capacité du condensateur dépend de plusieurs paramètres comme la nature de l'isolant situé entre ses armatures, mais aussi de la géométrie de ces armatures et notamment de la distance qui les séparent.

Les écrans tactiles reposent sur cet effet capacitif : chaque « pixel » de l'écran est relié à un condensateur. Lorsque l'utilisateur appuie avec son doigt en un point donné, il modifie la distance entre les armatures du condensateur, modifiant ainsi la valeur de sa capacité et donc la valeur du signal électrique fourni par ces condensateurs, ce qui permet de détecter la position du doigt sur l'écran.